Capítulo 7

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

7.1. Introducción

Se denomina ecuación lineal a aquella que tiene la forma de un polinomio de primer grado, es decir, las incógnitas no están elevadas a potencias, ni multiplicadas entre sí, ni en el denominador.

Por ejemplo, $3x + 2y + 6z = 6$ es una ecuación lineal con tres incógnitas.

Como es bien sabido, las ecuaciones lineales con 2 incógnitas representan una recta en el plano.

Si la ecuación lineal tiene 3 incógnitas, su representación gráfica es un plano en el espacio.

Un ejemplo de ambas representaciones puede observarse en la figura:

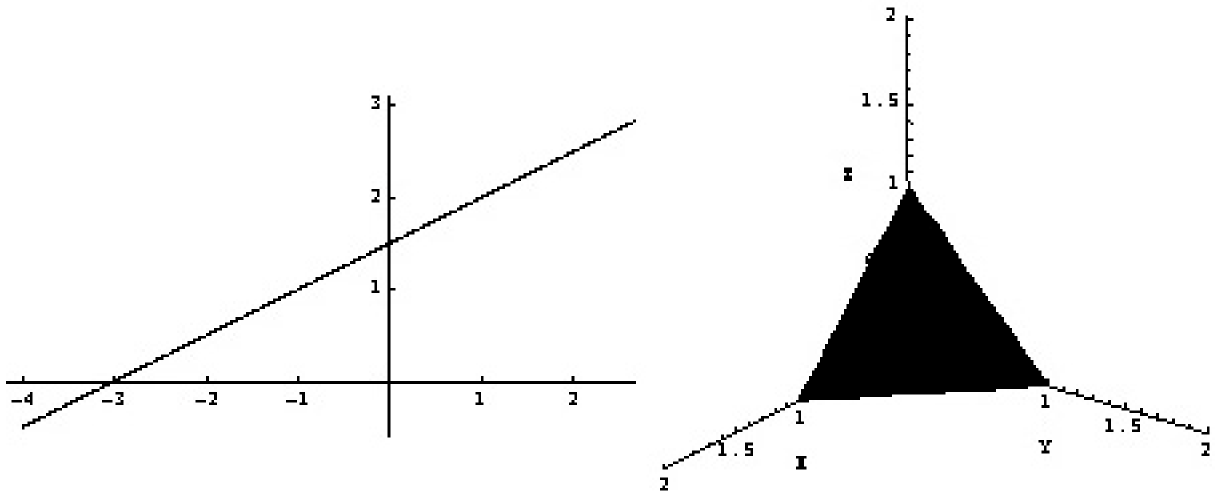


Figura 7.1: Representación gráfica de la recta $-x + 2y = 3$ en el plano y del del plano $x + y + z = 1$ en el espacio

El objetivo del tema es el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, es decir, un conjunto de varias ecuaciones lineales. Diremos que dos ecuaciones son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones, o geométricamente representan la misma recta o plano.

7.2. Sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones lineales de la forma:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \cdots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{array}\right\}$$

En este caso tenemos m ecuaciones y n incógnitas.

Los números reales a_{ij} se denominan *coeficientes* y los x_i se denominan *incógnitas* (o números a determinar) y b_j se denominan *términos independientes.*

En el caso de que las incógnitas sean 2 se suelen designar simplemente por x e y en vez de x_1 y x_2 , y en el caso de tres, x, y, z en lugar de x_1, x_2 y x_3 pero esto es indiferente a la hora de resolver el sistema.

Resolver el sistema consiste en calcular las incógnitas para que se cumplan **TODAS** las ecuaciones del sistema simultáneamente.

Diremos que dos sistemas son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones.

7.3. Expresión matricial de un sistema

Cualquier sistema de ecuaciones lineales se puede expresar en forma matricial del modo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{m x n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{n x 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{m x 1}}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se llama *matriz de coeficientes*, la matriz $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ se llama *matriz de incógnitas*, y la matriz $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ se llama *matriz de términos independientes.*

La matriz formada por A y B conjuntamente, es decir:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se llama matriz ampliada del sistema y se representará por $(A|B)$ o bien por A^*.

Ejemplo: El sistema: $\left.\begin{array}{r} x+y-z=5 \\ x+y=7 \\ 2x+2y-z=12 \end{array}\right\}$ escrito matricialmente es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada es:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & -1 & 12 \end{array}\right)$$

7.4. Tipos de sistemas

En general,buscaremos las soluciones de los sistemas en los números reales $\mathbb{R}$. Dependiendo del posible número de tales soluciones reales que tenga un sistema, éstos de pueden clasificar en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{* INCOMPATIBLES (No tienen solución)} \rightarrow \text{S.I.} \\ \text{* COMPATIBLES (Tienen solución)} \left\{ \begin{array}{l} \text{* DETERMINADOS (Solución única)} \rightarrow \text{S.C.D.} \\ \text{* INDETERMINADOS (Infinitas soluciones)} \rightarrow \text{S.C.I.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

7.5. Sistemas con dos incógnitas

Los sistemas más sencillos son aquellos en los que sólo hay dos incógnitas y 2 ecuaciones, y que ya son conocidos de cursos pasados.

Hay varios sistemas para resolverlos, los más habituales:
* Reducción
* Igualación
* Sustitución
en los que ya no nos entretendremos.

Como cada ecuación lineal con 2 incógnitas se interpreta geométricamente como una recta, el estudio de la solución del sistema se limita a estudiar la posición de 2 rectas en el plano.

Veamos algunos ejemplos con los tres casos que se pueden presentar. Resolver e interpretar el sistema: $\left. \begin{array}{r} x + 2y = -3 \\ -2x + y = 1 \end{array} \right\}$.

Por reducción:

$$\begin{array}{r} 2x+4y=-6 \\ -2x+\ y=1 \\ \hline 5y=-5 \end{array}$$

de donde y = -1 y sustituyendo x + 2·(-1) = -3, x = -1.

Es decir, la solución del sistema es única, x = -1, y = -1 lo que significa que el sistema es compatible y determinado, y que las rectas se cortan en un punto, precisamente el (-1,-1):

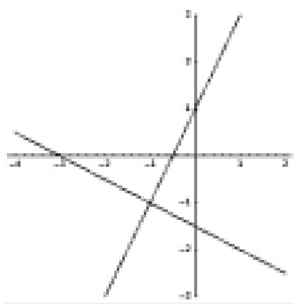


Figura 7.2: Solución del sistema, punto (-1,-1)

Resolver e interpretar el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+2y=-3 \\ -2x-4y=5 \end{array}\right\}$.

Por igualación: $\left.\begin{array}{r} x=-3-2y \\ x=\dfrac{5+4y}{-2} \end{array}\right\}$ de donde:

$$-3-2y=\frac{5+4y}{-2} \Longrightarrow 4y+6=5+4y \Longrightarrow 0y=-1 \Longrightarrow 0=-1$$

lo cuál es imposible y por tanto el sistema no tiene solución, es un sistema incompatible y por tanto las rectas son paralelas. Geométricamente:

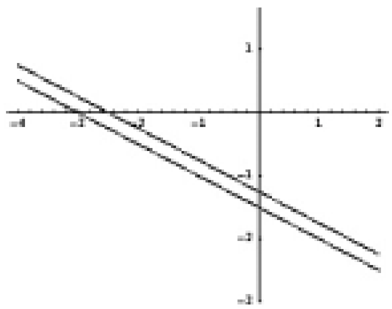


Figura 7.3: Sistema sin solución. Rectas paralelas

Resolver e interpretar el sistema: $\left.\begin{array}{r} x+2y=-3 \\ 3x+6y=-9 \end{array}\right\}$.

Por sustitución, como $x=-2y-3$ resulta $3(-2y-3)+6y=-9$, es decir $-6y-9+6y=-9$, por tanto 0y = 0, $0=0$.

Como $0=0$ es una igualdad siempre cierta, quiere decir que el sistema tiene infinitas soluciones, es compatible indeterminado, o que las rectas son la misma.

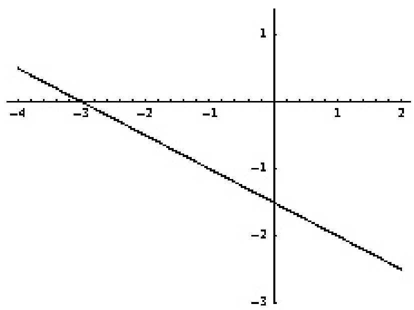


Figura 7.4: Infinitas soluciones. Las rectas coinciden

Lo expresaremos así. Como $x=-2y-3$, dando valores a y se obtiene x.

Así si le damos a y el valor arbitrario de λ (lambda), entonces expresaremos la solución como:

$$\left.\begin{array}{r} x=-2\lambda-3 \\ y=\lambda \end{array}\right\} \text{siendo } \lambda \in \mathbb{R}$$

y como λ puede ser cualquier número real, hay infinitas soluciones.

Estos son los únicos casos que pueden darse con dos ecuaciones y dos incógnitas, y su interpretación geométrica.

Ejercicio: Estudiar la solución de los siguientes sistemas e interpretarla geométricamente:

$$\text{a)}\begin{cases} x+y=5 \\ 2x-y=7 \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \quad \text{c)}\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=4 \end{cases}$$

7.5.1. Discución de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Si alguno de los coeficientes del sistema es desconocido, por ejemplo, $\begin{cases} ax+3y=5 \\ 2x-y=6 \end{cases}$, no estamos ante un sólo sistema, sino ante infinitos, uno para cada valor de a, y cada sistema será distinto en función del valor que tome dicha letra (llamada parámetro).

Para estudiarlo, se resuelve el sistema como habitualmente y se estudian los distintos casos que se pueden dar. Por ejemplo , por reducción:

$$\begin{array}{r} \text{ax+3y=5} \\ \text{6x-3y=18} \\ \hline \text{ax+6x =23} \end{array}$$

por tanto, $x(6+a)=23$. Entonces, si $6+a=0$ no podremos despejar x, es decir si $a=-6$, obtenemos una ecuación del tipo $0=23$, es decir, imposible.

Por tanto, si $a=-6$ el sistema es incompatible.

En cualquier otro caso, podemos despejar x,$x=\dfrac{23}{6+a}$, y se puede sacar y sustituyendo, por tanto, si $a\neq-6$, el sistema es compatible determinado.

Ejercicio: Discutir los sistemas en función del parámetro desconocido:

$$\text{a)}\begin{cases} x+y=5 \\ ax+2y=10 \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} ky+x=\dfrac{1}{2} \\ y-3x=5 \end{cases}$$

7.6. Sistemas de 2 incógnitas y 3 ecuaciones

Podemos añadir a los clásicos sistemas de 2 ecuaciones y 2 incógnitas cuantas ecuaciones queramos para obtener diferentes tipos de sistemas con 3, 4, 5 o más ecuaciones.

En cualquier caso, los tipos de sistemas a los que dan lugar son los mismos reseñados anteriormente.

Al aumentar el número de ecuaciones, la resolución del sistema por alguno de los tres métodos clásicos se vuelve más farragoso, por lo que conviene aplicar ya el conocido *método de Gauss* para determinar el tipo de sistema.

Para ello expresaremos el sistema en la forma matricial, analizando la matriz ampliada asociada, que tendrá 2 columnas y tantas filas como ecuaciones tengamos.

Analizaremos tan sólo aquellos sistemas con 3 ecuaciones y 2 incógnitas.

La matriz ampliada genérica es:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{array}\right)$$

Aplicar el método de Gauss consiste en realizar transformaciones elementales mediante las filas de la matriz para obtener la matriz escalonada siguiente:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & a_{22}^* & b_2^* \\ 0 & 0 & b_3^* \end{array}\right)$$

Recordemos que las operaciones elementales permitidas en las filas de la matriz (ecuaciones del sistema) eran:

T1) Multiplicar o dividir una fila por un número real distinto de cero.

T2) Sumar o restar a una fila otra multiplicada por un número real no nulo.

T3) Intercambiar el lugar de dos filas entre sí.

Utilizando estas transformaciones, los sucesivos sistemas que se obtienen son equivalentes al primero, es decir, tienen las mismas soluciones.

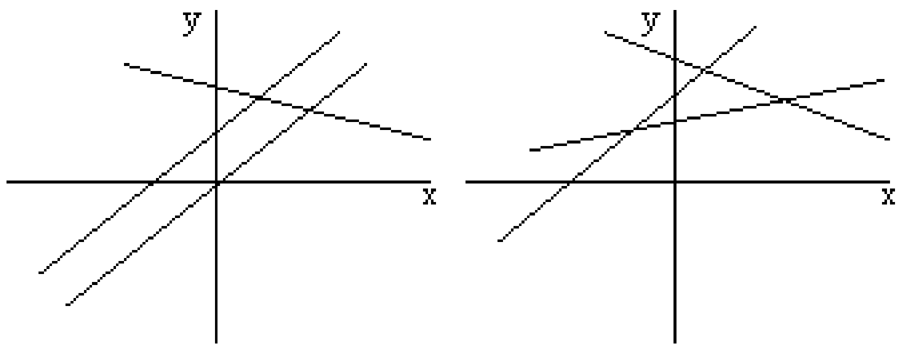
Debemos eliminar, en este orden, el elemento a_{21} utilizando la fila 1, el elemento a_{31}, utilizando también la fila 1, y por último el elemento a_{32} utilizando la fila 2, de modo análogo al método de Gauss-Jordan para la inversa.

Además, es conveniente en cada paso indicar la operación realizada con las filas, poniendo en primer lugar aquella que se va a sustituir por otra.

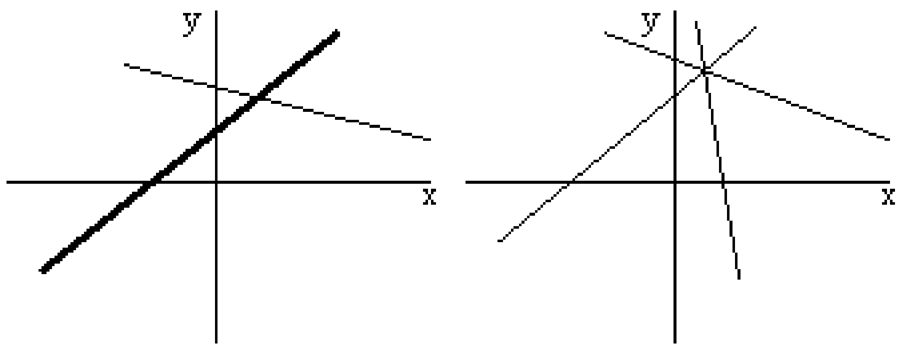
Llegados a la matriz ampliada escalonada al final del proceso, pueden darse los casos siguientes:

1. $a_{22}^* \neq 0$. Entonces hay dos posibilidades:

   a) $b_3^* \neq 0$. Sistema incompatible (hay una ecuación del tipo 0=k), sin solución.
   Geométricamente, puede ocurrir que:
   a) Dos rectas sean paralelas y la otra las corte.
   b) Las rectas se corten dos a dos (formen un triángulo).



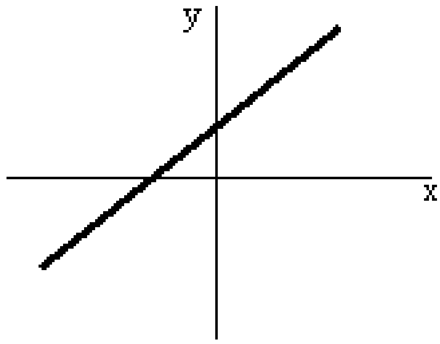
   b) $b_3^* = 0$. Aparece una ecuación 0=0 que no influye en la resolución del sistema, que reducido a las dos ecuaciones iniciales tiene solución única, es decir, el Sistema es Compatible Determinado.
   Geométricamente:
   a) Dos rectas son coincidentes y la otra las corta.
   b) Las tres rectas se cortan en un mismo punto.



2. $a_{22}^* = 0$. Entonces hay tres posibilidades:

   a) Si $b_2^* = b_3^* = 0$, aparecen dos ecuaciones 0=0, que no influyen en la resolución del sistema, que ahora tiene infinitas soluciones (1 ecuación y dos incógnitas). Sistema compatible indeterminado.

Geométricamente, las tres rectas coinciden (son la misma):

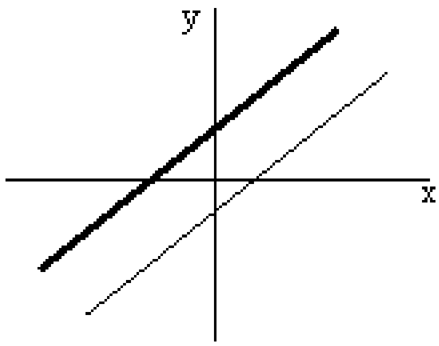


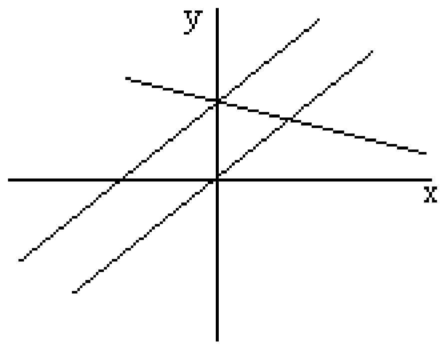
b) Si $b_2^* \neq 0, b_3^* = 0$ o bien $b_2^* = 0, b_3^* \neq 0$, aparece una ecuación 0=0 (que no influye) y otra 0=k (que es imposible). El sistema es incompatible.

Geométricamente:

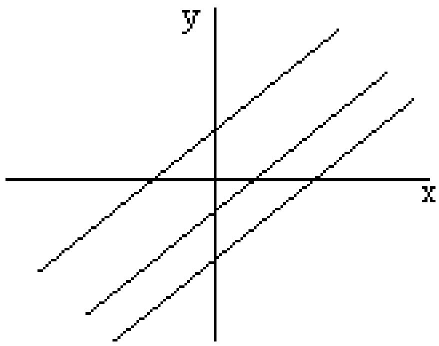
a) Dos rectas son paralelas y la otra las corta.

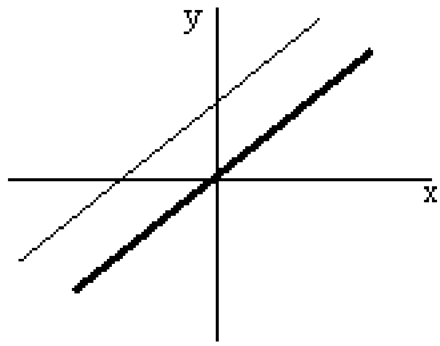
b) Dos rectas coinciden y la otra es paralela.





c) Si $b_2^* \neq 0, b_3^* \neq 0$, hay dos ecuaciones 0=k que son imposibles, el sistema es incompatible. Geométricamente, las tres rectas son paralelas o dos son coincidentes y una paralela.





En cada uno de los casos, para determinar la posición concreta de las rectas, basta representarlas.

Ejemplo Estudiar el sistema siguiente, dando la interpretación geométrica:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y=5 \\ 3x+y=7 \\ 2x+3y=12 \end{array}\right\}$$

A partir de la matriz ampliada y aplicando el método de Gauss, obtenemos:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2+3F_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 22 \\ 0 & 7 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-F_2} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 22 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso aparece una ecuación 0=0 que no influye y el elemento a^*_{22} es no nulo. El sistema es compatible determinado, tiene solución única.

Geométricamente, puede ocurrir que:

a) Dos rectas son coincidentes y la otra las corta.

b) Las tres rectas se cortan en un mismo punto.

Resolviendo y dibujando, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{r} -x+2y=5 \\ 7y=22 \end{array}\right\}$$

De donde $y = \dfrac{22}{7}$ y sustituyendo es $x = \dfrac{9}{7}$ (compruébalo).

Dibujando las rectas:

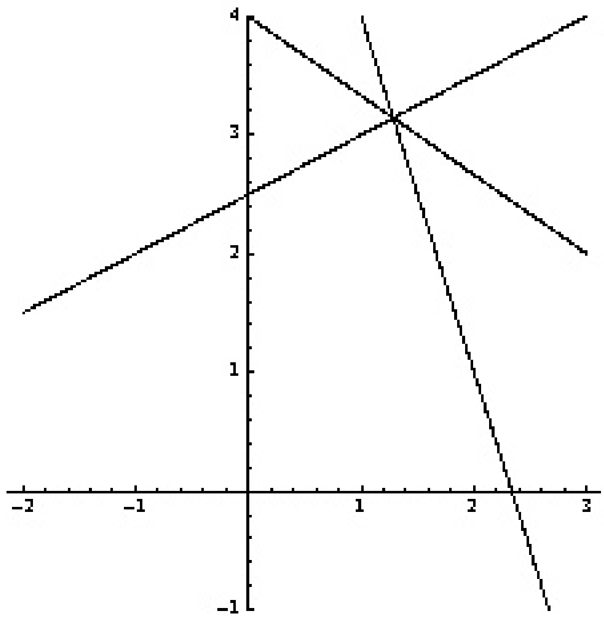


Figura 7.5: Solución del sistema. Las tres rectas se cortan en un punto: P=$\left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{22}{7}\right)$

se observa que las rectas se cortan en un punto, precisamente el punto solución del sistema: $P = \left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{22}{7}\right)$.

Ejercicios

a) Resuelve e interpreta geométricamente los sistemas:

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{c} x+y=0 \\ -x+y=2 \\ x+3y=-2 \end{array}\right. \quad \text{b)} \left\{\begin{array}{c} x-y=-2 \\ x+2y=1 \\ 4x-10y=-14 \end{array}\right. \quad \text{c)} \left\{\begin{array}{c} 2x+y=2 \\ -x+y=-3 \\ y=-2x \end{array}\right.$$

b) Discute y resuelve en función del parámetro:

$$\text{a)} \left\{\begin{array}{c} x-y=1 \\ x+2y=-1 \\ 2x+my=0 \end{array}\right. \quad \text{b)} \left\{\begin{array}{c} 2x+y=3 \\ -x+3y=0 \\ mx+4y=3 \end{array}\right.$$

7.7. Sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas

Cuando los sistemas tienen más de dos ecuaciones y tres o más incógnitas se utilizará el ya conocido método de Gauss.

Ahora partiremos de la matriz ampliada:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

para dejar dicha matriz escalonada, es decir, del tipo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}^* & a_{23}^* & b_2^* \\ 0 & 0 & a_{33}^* & b_3^* \end{array}\right)$$

utilizando las transformaciones conocidas, y de la forma indicada en ocasiones anteriores.

Los tipos de sistema que pueden obtenerse dependiendo del número de soluciones son los reseñados en apartados anteriores.

Al aplicar el método de Gauss podemos encontrarnos con distintos casos:

* Si se obtiene un sistema escalonado con coeficientes no nulos, el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

* Si se obtiene una o más filas en las que todos los elementos sean cero, el sistema tiene infinitas soluciones, y hay que despejar una o varias incógnitas en función de otras, es un sistema compatible indeterminado.

* Si se obtiene una o más filas de ceros, salvo el elemento correspondiente al término independiente, que es distinto de cero, digamos k, entonces como la fila en cuestión correspondería a una ecuación del tipo 0 = k , lo que es imposible, el sistema no tiene solución y por tanto es incompatible.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo Resolver por el método de Gauss: $\left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{array}\right.$.

La matriz ampliada es $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & -20 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right)$. Aplicando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & -20 \\ 4 & 2 & 5 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{2F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & -7 & 1 & -51 \\ 0 & 0 & 7 & -14 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x + y - z = 11 \\ -7y + z = -51 \\ 7z = -14 \end{array}\right.$$

obtenemos un sistema escalonado, que es compatible y determinado, pués podemos despejar z, obteniendo $z = -2$, y luego $-7y - 2 = -51$, de donde $-7y = -49$ es decir $y = 7$ y sustituyendo en la primera ecuación es $2x + 7 + 2 = 11$, luego $2x = 2$, es decir $x = 1$.

La solución es $(1, 7, -2)$.

Este proceso de resolución, que comienza calculando z y permite calcular las demás incógnitas sustituyendo en las ecuaciones anteriores se denomina *sustitución regresiva*.

7.7.1. Interpretación geométrica de los sistemas con 3 ecuaciones y 3 incógnitas

Como cada ecuación lineal con 3 incógnitas corresponde a un plano en el espacio, la solución del sistema correspoderá a la posición en que dichos planos estén en el espacio.

Lo más sencillo es saber que ocurre con los planos 2 a 2, pues en el espacio dos planos sólo pueden estar en 3 posiciones:

* *Son coincidentes:* Lo cuál es fácil de saber porque sus correspondientes ecuaciones tienen coeficientes de las incógnitas y los términos independientes proporcionales, es decir, si los planos son:

$$\begin{cases} \alpha \equiv Ax + By + Cz = D \\ \beta \equiv A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

entonces se verifica:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

(siempre que se puedan realizar las divisiones).

Por ejemplo, los planos $2x + 3y - z = 5$, y $-10x - 15y + 5z = -15$ son coincidentes.

* *Son paralelos:* También es sencillo de saber porque los coeficientes de las incógnitas son proporcionales, pero los términos independientes NO. Es decir, en este caso:

$$\begin{cases} \alpha \equiv Ax + By + Cz = D \\ \beta \equiv A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

entonces se verifica:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

(siempre que se puedan realizar las divisiones).

Por ejemplo, los planos $2x + 3y - z = 5$ y $-10x - 15y + 5z = 7$ son paralelos.

* *Son secantes:* Simplemente los coeficientes no son proporcionales, es decir:

$$\begin{cases} \alpha \equiv Ax + By + Cz = D \\ \beta \equiv A'x + B'y + C'z = D' \end{cases}$$

entonces se verifica:

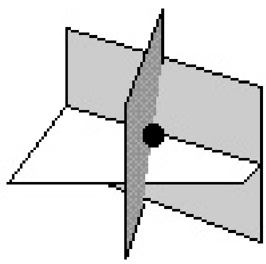
$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

(siempre que se puedan realizar las divisiones, y basta con que un par de ellas correspondientes a las incógnitas sean diferentes).

Por ejemplo, los planos $7x + 3y - z = 5$ y $-10x - 15y + 5z = 7$ son secantes.

Puesto que podemos determinar la posición de los planos 2 a 2, podemos determinar en qué posición se encuentran los 3 a la vez, fijándonos en los casos:

1. Si el sistema es S.C.D. (Solución única), es que los tres planos se cortan en un punto, que es la solución del sistema.

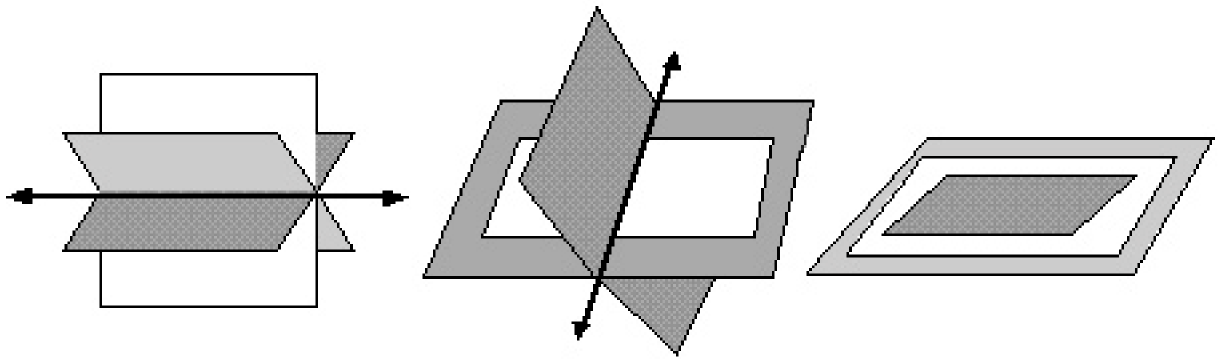


2. Si el sistema es S.C.I. (Infinitas soluciones), puede ocurrir que:

   a) Los tres planos se corten en una recta.

   b) Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.

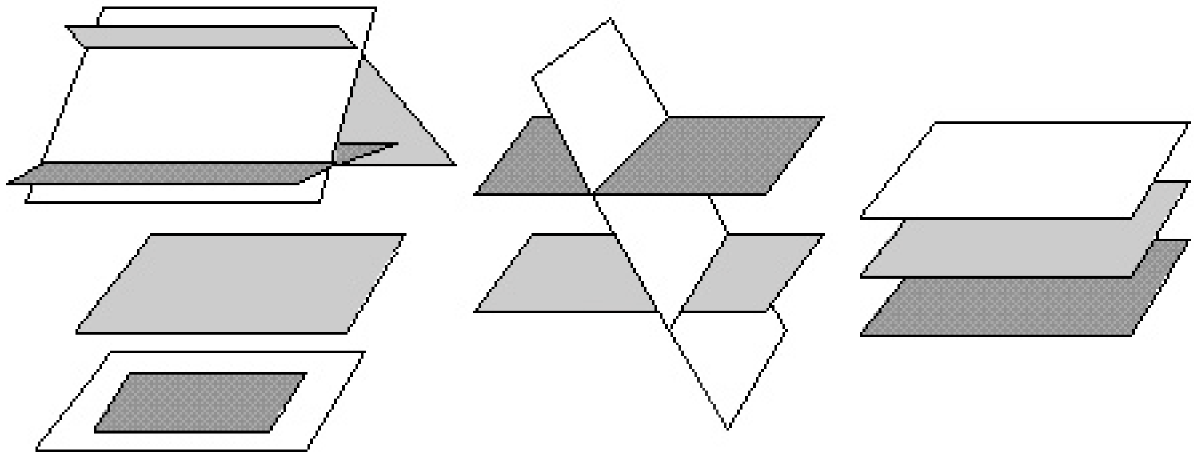
   c) Los tres planos son coincidentes.



Y determinaremos la opción correspondiente estudiándolos de dos en dos.

3. Si el sistema es S.I. (Sin solución), puede ocurrir que:

   a) Los planos se cortan dos a dos.
   b) Dos planos son paralelos y el otro los corta.
   c) Los tres planos son paralelos.
   d) Dos planos son paralelos y el otro coincidente con uno de ellos.



Y determinaremos la opción correspondiente estudiándolos de dos en dos.

Ejemplo: Estudiar el sistema e interpretarlo geométricamente:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=-6 \\ 3x-y+z=-5 \\ 4x+2y-2z=-1 \end{array}\right.$$

Aplicando Gauss a $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right)$, se obtiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_1]{2F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} 2x+y-z=-6 \\ -5y+5z=8 \\ 0=11 \end{array}\right.$$

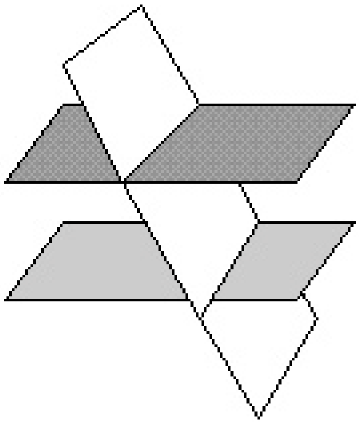
Lo que indica que el sistema es incompatible y por tanto no tiene solución, los planos no tienen puntos comunes.

Si estudiamos la posición de los planos 2 a 2, se obtiene que el primero y el segundo tienen coeficientes que no son proporcionales, luego se cortan.

El primero y el tercero tienen coeficientes proporcionales pero no los términos independientes, luego son paralelos.

Y el segundo y el tercero no tienen coeficientes proporcionales, por lo que se cortan.

Concluimos por tanto que los planos primero y tercero son paralelos y son cortados por el segundo plano, ésta es la interpretación geométrica:



Ejercicios: Estudiar e interpretar geométricamente los sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = -1 \\ 4x - 2y + 6z = -5 \\ -2x + y - 3z = -7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y + 3z = -5 \\ 3x + 2z = -7 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y + z = 8 \\ 7x + y + 6z = 7 \\ x + 7y + z = 1 \end{cases}$

7.7.2. Discusión de sistemas de 3 ecuaciones y 3 incógnitas

Si aparece algún coeficiente desconocido,aplicaremos el método de Gauss e investigaremos según los valores del parámetro la posibilidad de que aparezca o no una fila de ceros.

Ejemplo: Discutir según los valores de m el sistema: $\begin{cases} x + y + z = m + 1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + 7y + z = 1 \end{cases}$

Aplicando Gauss a la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(m\neq 0)]{F_2 - mF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 1 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1}$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & m-1 & 0 & -m \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 1-m & -1 & -m^2 \\ 0 & 0 & -1 & -m-m^2 \end{array}\right)$$

Debemos, llegados a este punto, fijarnos en dos aspectos:

a) El desarrollo anterior sólo es posible si $m \neq 0$, luego el caso $m = 0$ debe estudiarse por separado.

b) En el sistema escalonado final, hay problemas cuando el valor $1 - m = 0$, es decir, cuando $m = 1$. En cualquier otro caso, no hay problemas.

De modo que, resumiendo, si $m \neq 0$ y $m \neq 1$, el sistema es S.C.D.

Estudiemos ahora cada caso por separado:

Si $m = 0$, al aplicar Gauss, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

que vuelve a ser S.C.D.

Si $m = 1$, al aplicar Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Se obtienen dos valores distintos de z, lo que es absurdo y el sistema en este caso no tiene solución (S.I.)

Conclusión:
* Si $m = 1$ S.I.
* Si $m \neq 1$ S.C.D.

Ejercicios:

1. Discutir en función del parámetro desconocido los sistemas siguientes e interpretar geométricamente el resultado:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + y - 6z = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \\ 3x + -y + mz = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 3x + y + 2z = 1 - a \\ (1 + a)x + 2y + z = a \\ ax - y + z = 1 - a \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} x + y + az = a^2 \\ x + ay + z = a \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

2. Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ 3x - y + kz = 5 \end{cases}$, se pide:

   a) Hallar el valor de k que hace el sistema incompatible.

   b) Hallar el valor de k que hace el sistema compatible y además z= -1.

   c) Para el valor de k hallado en b), resolver el sistema.

7.8. Aplicación de las matrices y determinantes a la resolución de sistemas. Regla de Cramer

7.8.1. Aplicación de las matrices

Si tenemos un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (un sistema de ese tipo de llama cuadrado), entonces la matriz A de coeficientes es cuadrada y podemos escribir el sistema matricialmente así:

$$A \cdot X = B$$

donde A,X y B son las matrices ya definidas de coeficientes, incógnitas y términos independientes respectivamente.

Como el objetivo es calcular la matriz X de incógnitas, el problema estaría resuelto si conseguimos despejar X de dicha ecuación.

Sabemos que eso se puede hacer sólo cuando la matriz A posee inversa, y en ese caso aplicaríamos que:

$$A \cdot X = B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

es decir podríamos calcular X, y el sistema tendría solución única.

Si A no posee inversa, no podemos despejar X y el sistema no se puede resolver de esta manera.

Conclusión: En un sistema cuadrado y cuya matriz de coeficientes tenga inversa, la solución del sistema viene dada por:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Ejemplo: Resolver, aplicando la inversa, el sistema: $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$.

La matriz de coeficentes es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Para poder aplicar lo anterior es necesario que A tenga inversa, lo que por ejemplo comprobamos haciendo det (A).

Como $det(A) = -49$, no nulo, A tiene inversa. Por tanto y según lo dicho,$X = A^{-1} \cdot B$, es decir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Si hacemos la inversa de A (¡compruébalo!), resulta:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{49} & \frac{1}{7} & \frac{3}{49} \\ \frac{5}{49} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{49} \\ \frac{-2}{49} & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

y por tanto,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{49} & \frac{1}{7} & \frac{3}{49} \\ \frac{5}{49} & \frac{-2}{7} & \frac{1}{49} \\ \frac{-2}{49} & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

es decir x=1, y=7 , z=-2 , solución que ya habíamos obtenido utilizando el método de Gauss.

7.8.2. Regla de Cramer

En el caso de sistemas que cumplan las mismas condiciones que los del anterior apartado, es decir, que sean cuadrados y tales que su matriz de coeficientes tenga inversa (los sistemas que cumplen estas dos condiciones se llaman *sistemas de Cramer*), se puede aplicar una regla muy sencilla para calular la solución y que se basa en los determinantes, conocida como *regla de Cramer*.

Si det(A) es cero, evidentemente la regla no se puede aplicar.

La regla de Cramer:

Para un sistema de Cramer (cuadrado y con matriz regular) se verifica que la incónita número k se calcula dividiendo entre el determinante de A el determinante que resulta de sustituir la columna k (correspodiente al lugar que ocupe la incógnita que se está calculando) por la columna de términos independientes.

Ejemplo: Resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$.

Como el sistema es de Cramer puesto que $det(A) = -49$, aplicamos la regla de Cramer:

Para x sustituimos la primera columna por la de términos independientes pues x es la primera incógnita:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 1 & -1 \\ -20 & -3 & 0 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{-49} = \frac{-49}{-49} = 1$$

Para y sustituimos la segunda columna por la de términos independientes pues y es la segunda incógnita.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 1 & -20 & 0 \\ 4 & 8 & 5 \end{vmatrix}}{-49} = \frac{-343}{-49} = 7$$

Para z sustituimos la tercera columna por la de términos independientes pues z es la tercera incógnita).

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 11 \\ 1 & -3 & -20 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix}}{-49} = \frac{98}{-49} = -2$$

Y obtenemos la solución como antes.

Recordemos que esto sólo se puede aplicar para sistemas de Cramer.

Ejercicio: Resolver, mediante estos dos métodos, los sistemas:

$$\text{a)} \begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

7.9. Estudio de sistemas cualesquiera mediante el cálculo del rango. Teorema de Rouché-Frobenius

Saber si un sistema tiene o no solución (si es compatible), y cuántas soluciones tiene (si es determinado o indeterminado), se reduce para cualquier tipo de sistemas a estudiar rangos. El resultado fundamental es el:

Teorema de Rouché-Frobenius:

Un sistema cualquiera de matriz A y matriz ampliada $(A|B)$ tiene solución (es compatible) si y solamente si $Rg(A) = Rg(A|B)$.

Por tanto si los dos rangos son distintos el sistema no tiene solución (S.I.).

Además, si dicho rango coincide con el número de incógnitas del sistema, la solución es única (S.C.D.), y si dicho rango es menor que el número de incógnitas, hay infinitas soluciones (S.C.I.).

Es importante darse cuenta de que $Rg(A) \leq Rg(A|B)$, puesto que la matriz de coeficientes forma parte de la ampliada, es decir, la matriz A no puede tener rango mayor que la ampliada.

Aún siendo importante, el único problema que plantea este teorema es que NO ofrece ningún método para calcular la solución, sólamente dice si hay solución o no.

Ejercicio: Aplicar el teorema de Rouché para determinar el tipo de sistema que es:

$$\text{a)} \begin{cases} x + y - z + t = 4 \\ 2x - y + 3z + 2t = -1 \\ -4x + 5y - 11z - 4t = 11 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = -2 \\ 5x - 4y = 7 \end{cases} \quad \text{c)} \begin{cases} x + 3y = 3 \\ 3x + 5y = 7 \\ 2x + 4y = 5 \end{cases} \quad \text{d)} \begin{cases} 3x + 3y - z = -1 \\ x + y - 5z = 2 \end{cases}$$

7.10. Sistemas homogéneos

Un sistema homogéneo es aquél que tiene todos los términos independientes nulos.

Cualquier sistema homogeneo es evidente que es compatible, pues dando a cada incógnita el valor 0, se cumplen las ecuaciones. Esta solución (que todas las incógnitas sean nulas) se llama *solución trivial.*

El problema entonces está en determinar si dichos sistemas son compatibles determinados o indeterminados.

Aplicando el teorema de Rouché sólo podemos tener dos casos:

a) Rg (A) = nº incógnitas. En este caso el sistema es compatible determinado, y por tanto tiene solución única que es la trivial (todas las incógnitas valen cero)

b) Rg(A) < nº incógnitas. En este caso el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones que se determinan de la manera conocida.

Ejercicios:

1. Estudiar la solución de los sistemas homogéneos siguientes:

$$\text{a)}\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \text{b)}\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \quad \text{c)}\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \\ 4x+y-z=0 \end{cases}$$

2. Discutir el sistema homogéneo: $\begin{cases} 6x+18y-bz=0 \\ 7x-2y-4z=0 \\ 4x+10y-6z=0 \end{cases}$.