EJERCICIOS SISTEMAS DE ECUACIONES (GAUSS)

Ejercicio nº 1.- **Resuelve el sistema:**

$$\left.\begin{array}{r} -x+3y-z=4 \\ x+4y \qquad =5 \\ 2x-6y+2z=3 \end{array}\right\}$$

Solución: Lo resolvemos mediante el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a+1^a \\ 3^a+2\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{r} -x+3y-z=4 \\ 7y-z=9 \\ 0x+0y+0z=11 \end{array}$$

La última ecuación es imposible. El sistema es incompatible.

Ejercicio nº 2.- **Resuelve, por el método de Gauss, los sistemas:**

a) $\left.\begin{array}{r} -3x+y-z=-4 \\ 5x-2y+z=6 \\ -x+y+3z=0 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x+2y+z+t=3 \\ -x+y \qquad +2t=-1 \\ -x+7y+2z+8t=1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & -1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 3^a \\ 1^a \\ 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -4 \\ 5 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a-3\cdot 1^a \\ 3^a-5\cdot 1^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & -4 \\ 0 & 3 & 16 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a:(-2) \\ 3^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 16 & 6 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a-3\cdot 2^a \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} -x+y+3z=0 \\ y+5z=2 \\ z=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x=y+3z=2 \\ y=2-5z=2 \\ z=0 \end{array}\right\} \text{ La solución es } (2,\ 2,\ 0).$$

Es un S.C.D.

b) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a+1^a \\ 3^a+1^a \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & 9 & 4 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a}-3\cdot 2^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z+t=3 \\ 3y+z+3t=2 \\ 0x+0y+0z+0t=-2 \end{array}\right\}$$

La última ecuación es imposible. Por tanto, el sistema es incompatible (S.I)

***<u>Ejercicio nº 3</u>*.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones, resuélvelo gráficamente y analíticamente por Gauss** $\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ 3x\quad y\quad 5 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$ __________

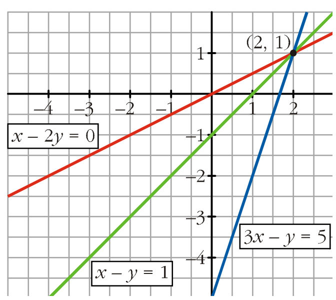
Solución: Resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-3\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-5\cdot 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2y=2 \\ y=1 \end{array}\right\}$$

El sistema es compatible determinado. La solución es (x, y)=(2, 1), es un S.C.D

Geométricamente, representa tres rectas que se cortan en el punto (2, 1):



<u>Ejercicio nº 4-</u>

a) Explica si el siguiente sistema de ecuaciones es compatible o incompatible:

$$\left\{\begin{array}{r} \mathbf{3x-2y+4z=6} \\ \mathbf{-2x+4y-z=3} \\ \mathbf{x+2y+3z=1} \end{array}\right.$$

b) ¿Podríamos conseguir que fuera compatible determinado, suprimiendo una de las ecuaciones? Razónalo.

Solución:

a) Observamos que la tercera ecuación es suma de las dos primeras, salvo en el término independiente que, en lugar de un 9, es un 1. Por tanto, la tercera ecuación contradice las dos primeras. El sistema es incompatible.
b) No. Si suprimimos una de las ecuaciones, obtendremos un sistema con tres incógnitas y solo dos ecuaciones. Este nuevo sistema podría ser compatible indeterminado (en este caso lo sería), pero no compatible determinado.

Ejercicio nº 5- **Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10% de descuento.**

Solución:

	ROTULADOR	CUADERNO	CARPETA
PRECIO SIN DESCUENTO	x	y	z
PRECIO CON DESCUENTO	$0{,}9x$	$0{,}9y$	$0{,}9z$

Planteamos el sistema con los datos que nos dan:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}9x+0{,}9y+0{,}9z=3{,}56 \\ y=\dfrac{x}{2} \\ z=y+0{,}2x \end{array}\right\} \quad z=\frac{x}{2}+0{,}2x=0{,}5x+0{,}2x=0{,}7x$$

$$0{,}9x+0{,}9\cdot\frac{x}{2}+0{,}9\cdot 0{,}7x=3{,}56 \;\rightarrow\; 0{,}9x+0{,}45x+0{,}63x=3{,}56 \;\rightarrow\; 1{,}98x=3{,}56$$

$$\rightarrow \quad x=1{,}80$$

$$y=\frac{x}{2}=\frac{1{,}80}{2}=0{,}90$$

$$z=0{,}7x=1{,}26$$

Por tanto, el rotulador marcaba 1,80 euros, el cuaderno, 0,90 euros y, la carpeta, 1,26 euros.

Ejercicio nº 6.- **En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales para calcular cuántos helados de cada sabor se compran a la semana.
b) Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución:

a) Llamamos x al número de helados de vainilla que se compran semanalmente, y al número dr helados de chocolate, y z al de helados de nata.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Compran 110 helados en total} \;\rightarrow\; x+y+z=110 \\ \text{Precio total 540 euros} \;\rightarrow\; 4x+5y+6z=540 \\ \text{Chocolate y nata} = 20\%\text{ más que vainilla} \;\rightarrow\; y+z=1{,}2x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ 4x+5y+6z=540 \\ 12x-10y-10z=0 \end{array}\right\}$$

b) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 4 & 5 & 6 & 540 \\ 12 & -10 & -10 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^{a} \\ 2^{a}-4\cdot 1^{a} \\ 3^{a}-12\cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & -22 & -22 & -1\,320 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 3^a:(-22) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} 1^a \\ 2^a \\ 2^a-3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=110 \\ y+2z=100 \\ z=40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=110-y-z=110-20-40=50 \\ y=100-2z=100-80=20 \\ z=40 \end{array}$$

Por tanto, se compran 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata.

<u>Ejercicio nº 7.-</u> **En una reunión hay 22 personas, entre hombres, mujeres y niños. El doble del número de mujeres más el triple del número de niños, es igual al doble del número de hombres.**

a) Con estos datos, ¿se puede saber el número de hombres que hay?

b) Si, además, se sabe que el número de hombres es el doble del de mujeres, ¿cuántos hombres, mujeres y niños hay?

Solución:

a) Llamemos x al número de hombres, y al de mujeres y z al de niños.

Como hay 22 personas, tenemos que: $x+y+z=22$

Con el otro dato, planteamos otra ecuación: $2y+3z=2x$

Solo con estos datos no podemos saber el número de hombres (ni el de mujeres, ni el de niños) que hay. Es un sistema compatible indeterminado; como tenemos tres incógnitas, para que pueda ser compatible determinado, necesitamos otra ecuación.

b) Añadiendo una tercera ecuación con el dato que nos dan, planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=22 \\ -2x+2y+3z=0 \\ x=2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3y+z=22 \\ -2y+3z=0 \\ \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z=22-3y \\ -2y+66-9y=0 \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=22-18=4 \\ -11y=-66 \rightarrow y=6 \\ x=12 \end{array}$$

Por tanto, hay 12 hombres, 6 mujeres y 4 niños.